9η Άσκηση Άλγεβρας Β΄ Λυκείου

2022-2023

Έως τις τριγωνομετρικές εξισώσεις

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha+\beta\eta\mu\left(\frac{\gamma x-11\pi}{2}\right)$, $\beta>0$, $\alpha,\gamma\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι περιοδική με περίοδο $T=2\pi$, έχει μέγιστο το 3 και η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $y=1$ για $x=\frac{\pi}{2}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=1+2\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3\varepsilon\varphi x+1$ στο $(0,\pi)$.

δ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x-\frac{\sqrt{3}}{2}f(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $-1-\sqrt{3}\le g(x)\le 1+\sqrt{3}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να εξετάσετε αν το $-1-\sqrt{3}$ και το $1+\sqrt{3}$ είναι ακρότατα της g.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$ στο $[0,2\pi]$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) Είναι $f(x)=\alpha+\beta\eta\mu\left(\frac{\gamma x-11\pi}{2}\right)=\alpha+\beta\eta\mu\left(\frac{\gamma x}{2}-\frac{11\pi}{2}\right)=\alpha+\beta\eta\mu\left(\frac{\gamma x}{2}-\frac{12\pi-\pi}{2}\right)=$

$=\alpha+\beta\eta\mu\left(\frac{\gamma x}{2}-\left(6\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\alpha+\beta\eta\mu\left(\frac{\gamma x}{2}-6\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\alpha+\beta\eta\mu\left(\frac{\gamma x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\gamma x}{2}\right)$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma x}{2}$. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $|\alpha|$ μονάδες προς τα πάνω ή κάτω.

Οι f και g λοιπόν έχουν ίδια περίοδο. Η g έχει περίοδο $T=\frac{2\pi}{\frac{\gamma}{2}}=\frac{4\pi}{\gamma}$ άρα $\frac{4\pi}{\gamma}=2\pi\Leftrightarrow\gamma=\frac{4\pi}{2\pi}\Leftrightarrow\gamma=2$.

Άρα $f(x)=\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu x$. Επίσης η g έχει μέγιστη τιμή $\max g=|\beta|\overset{\beta>0}{=}\beta$ άρα η f έχει μέγιστη τιμή $\max f=\beta+\alpha\Leftrightarrow\beta+\alpha=3\Leftrightarrow\beta=3-\alpha$ (1). Επειδή η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία $y=1$ για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow\alpha+\beta\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1\Leftrightarrow\alpha=1$. Επομένως $(1)\,\beta=3-1\Leftrightarrow\beta=2$.

Άρα είναι $f(x)=1+2\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(0)=1+2\sigma\upsilon\nu 0=1+2=3$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $A(0,3)$.

Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow 1+2\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$. Άρα η C_f τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία της μορφής $B_\kappa\left(2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3},0\right)$.

γ) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

$f(x)=3\varepsilon\varphi x+1\Leftrightarrow\cancel{1}+2\sigma\upsilon\nu x=3\varepsilon\varphi x+\cancel{1}\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=\frac{3\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x=3\eta\mu x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\left(1-\eta\mu^2 x\right)=3\eta\mu x\Leftrightarrow 2-2\eta\mu^2 x=3\eta\mu x\Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x+3\eta\mu x-2=0$ (2)

Θέτουμε $\omega=\eta\mu x$ με $-1\leq\omega\leq 1$.

Είναι $(2)\Leftrightarrow 2\omega^2+3\omega-2=0\Leftrightarrow 2(\omega+2)\left(\omega-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\omega=-2$ αδύνατη ή $\omega=\frac{1}{2}$ δεκτή

$$\eta\mu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\begin{cases}2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}\\ 2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

Είναι $0<x<\pi\Leftrightarrow 0<2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}<\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{6}<2\kappa\pi<\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow-\frac{1}{12}<\kappa<\frac{5}{12}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\kappa=0$ άρα $x=\frac{\pi}{6}$

Είναι $0<x<\pi\Leftrightarrow 0<2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}<\pi\Leftrightarrow-\frac{5\pi}{6}<2\kappa\pi<\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow-\frac{5}{12}<\kappa<\frac{1}{12}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\kappa=0$ άρα $x=\frac{5\pi}{6}$

δ) Είναι $g(x)=\eta\mu x-\frac{\sqrt{3}}{2}f(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\eta\mu x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+2\sigma\upsilon\nu x)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\eta\mu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$

i) $-1\le\eta\mu x\le 1$ (3) και $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1\Leftrightarrow-\sqrt{3}\le-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x\le\sqrt{3}$ (4) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα προσθέτοντας κατά μέλη τις (3),(4) είναι $-1-\sqrt{3}\le g(x)\le 1+\sqrt{3}$.

ii) Για να αποτελούν ακρότατα της συνάρτησης πρέπει να υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια ώστε $g(x_1)=-1-\sqrt{3}$ και $g(x_2)=1+\sqrt{3}$.

Έστω ότι $g(x_1)=-1-\sqrt{3}\Leftrightarrow\eta\mu x_1-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x_1=-1-\sqrt{3}$ (5) . Λόγω των (3),(4) η (5) θα ισχύει όταν $\eta\mu x_1=-1$ και $-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x_1=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x_1=1$. Τότε θα είναι $\eta\mu^2x_1+\sigma\upsilon\nu^2x_1=1\Leftrightarrow 2=1$ άτοπο.

Έστω ότι $g(x_2)=1+\sqrt{3}\Leftrightarrow\eta\mu x_2-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x_2=1+\sqrt{3}$ (6) . Λόγω των (3),(4) η (6) θα ισχύει όταν $\eta\mu x_2=1$ και $-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x_2=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x_2=-1$. Τότε θα είναι $\eta\mu^2x_2+\sigma\upsilon\nu^2x_2=1\Leftrightarrow 2=1$ άτοπο.

Άρα δεν αποτελούν ακρότατα της g.

iii) $g(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$ (7)

Έστω ότι $\sigma\upsilon\nu x=0$ τότε από την (7) είναι και $\eta\mu x=0$ άρα $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο.

Άρα $\sigma\upsilon\nu x\ne 0$ και είναι (7)$\Leftrightarrow\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

Είναι $0\le x\le 2\pi\Leftrightarrow 0\le\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{3}\le\kappa\pi\le\frac{5\pi}{3}\Leftrightarrow-\frac{1}{3}\le\kappa\le\frac{5}{3}<2\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}\kappa=0$ ή $\kappa=1$

Άρα $x=\frac{\pi}{3}$ ή $x=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$.